

Tugas 1 Analisis I (3 Sept 2023)

~~Latihan~~

1. Misal $g(x) = x^2$ dan $f(x) = x+2$ untuk $x \in \mathbb{R}$
 $h = g \circ f$.

(a) Tentukan peta langsung $h(E)$ dengan
 $E = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } h(x) &= g(f(x)) \\ &= (f(x))^2 \\ &= (x+2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(0) &= (0+2)^2 & h(1) &= (1+2)^2 \\ &= 4 & &= 3^2 \\ & & &= 9 \end{aligned}$$

$$h(E) = \{y \mid 4 \leq y \leq 9, y \in \mathbb{R}\}$$

(b). Tentukan peta inverse $h^{-1}(6)$ dengan
 $G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } h(x) &= (x+2)^2 \\ h^{-1}((x+2)^2) &= x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(0) \quad \Rightarrow h^{-1}(1)$$

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= 0 & (x+2)^2 &= 1 \\ x+2 &= 0 & \sqrt{(x+2)^2} &= 1 \\ x &= -2 & |x+2| &= 1 \\ & & x+2 &= 1 \quad \vee \quad -x-2=1 \\ & & x &= -1 \quad \vee \quad x = -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(2) \quad \Rightarrow h^{-1}(3)$$

$$(x+2)^2 = 2 \quad (x+2)^2 = 3$$

$$\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{2} \quad \sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{3}$$

$$|x+2| = \sqrt{2} \quad |x+2| = \sqrt{3}$$

$$x+2 = \sqrt{2} \quad \vee \quad -x-2 = \sqrt{2} \quad x+2 = \sqrt{3} \quad \vee \quad -x-2 = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{2}-2 \quad \vee \quad x = -2-\sqrt{2} \quad x = \sqrt{3}-2 \quad \vee \quad x = -2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h^{-1}(4)$$

$$(x+2)^2 = 4 \quad h^{-1}(6) = \{y \mid -4 \leq y \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\sqrt{(x+2)^2} = 2$$

$$|x+2| = 2$$

$$x+2 = 2 \quad \vee \quad -x-2 = 2$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -4$$

2). Buktikan $f: A \rightarrow B$ bijektif, maka
 f^{-1} fungsi bijektif dari B ke A .

Fungsi bijektif $\Rightarrow$ fungsi tersebut satu-satu
dan pada

$\Rightarrow$ Buktikan f^{-1} injektif (satu-satu).

$\Rightarrow$ Asumsi f^{-1} tidak injektif

Ambil $b_1, b_2 \in B$

Sehingga,

$$f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) = a, \quad a \in A$$

maka akan diperoleh :

$$f(a) = b_1 \quad \vee \quad f(a) = b_2$$

Hal tersebut membuktikan bahwa $f: A \rightarrow B$ tidak injektif, maka $f: A \rightarrow B$ bukan fungsi. Padahal di soal sudah jelas bahwa $f: A \rightarrow B$ merupakan fungsi bijektif. Maka, agar $f: A \rightarrow B$ bijektif maka $f^{-1}: B \rightarrow A$ HARUS INJEKTIF

$\Rightarrow$ Buktikan $f^{-1}: B \rightarrow A$ Surjektif (pada)

$f: A \rightarrow B$, ambil $a \in A$, maka :

$$b = f(a)$$

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

Dapat disimpulkan bahwa ketika diambil sembarang $b \in B$ maka pastilah punya pasangan di A

Jadi apabila $f: A \rightarrow B$ bijektif, maka f^{-1} fungsi bijektif dari B ke A .

3. Buktikan bahwa jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ fungsi bijektif, maka $g \circ f$ fungsi bijektif dari A ke C !

Ambil $a_1, a_2 \in A$. Karena $f: A \rightarrow B$ bijektif, maka : $\rightarrow a_1 \neq a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
 Karena f bijektif, pasti hasil $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$. Maka misalkan saja :

$$f(a_1) = b_1 ; f(a_2) = b_2, b_1, b_2 \in B$$

Ingat bahwa $b_1 \neq b_2$.

Lakukan hal serupa pada fungsi g . Karena $g: B \rightarrow C$ bijektif, maka :

$$b_1 \neq b_2 \Leftrightarrow g(b_1) \neq g(b_2)$$

misalkan : $g(b_1) = c_1$, dengan $c_1, c_2 \in C$
 $g(b_2) = c_2$ serta $c_1 \neq c_2$

Maka, dapat ditulis

$$\begin{cases} g(b_1) = g(f(a_1)) = c_1 \\ g(b_2) = g(f(a_2)) = c_2 \end{cases}$$

Karena $c_1 \neq c_2$, maka

$$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$$

Dapat disimpulkan $g \circ f$ fungsi Injektif.

Ambil sembarang $c \in C$, maka pastilah ada a yang memenuhi persamaan :

$$g(f(a)) = c$$

Jadi, $g \circ f$ adalah fungsi Surjektif.

Karena $g \circ f$ satu-satu dan pada, pastilah dapat disimpulkan $g \circ f$ bijektif.

► Tugas

1). Diberikan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ fungsi.

a. Tunjukkan bahwa $g \circ f$ injektif, maka f injektif.

b. Tunjukkan bahwa $g \circ f$ surjektif, maka g surjektif.

c. Tunjukkan bahwa jika $H \subseteq C$ maka $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$.

Jawab.

1). a. $g \circ f$ injektif :

ambil $a_1, a_2 \in A$

$$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$$

maka haruslah :

$$f(a_1) \neq f(a_2); a_1 \neq a_2$$

untuk sembarang $a_1, a_2 \in A$.

Jadi, terbukti bahwa apabila $g \circ f$ injektif, maka f injektif. Karena ketika f tidak injektif, pasti $g \circ f$ tidak injektif pula.

b. $g \circ f$ surjektif :

ambil sembarang $c \in C$, maka pasti ada $a \in A$, yang memenuhi

$$g(f(a)) = c$$

Asumsikan $f(a_1) = b$, dengan $b \in B$, maka :

$$g(b) = c$$

Maka, $g(b) = g(f(a_1)) = c$

Karena ketika diambil sembarang $c \in C$ pasti fungsi g selalu mendefinisikan c memiliki pasangan di B , jadi g merupakan fungsi.

Surjektif!

c. Asumsikan bahwa $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$

keduanya fungsi yang punya invers (invertible).

► $(g \circ f)^{-1}(H)$

• Tentukan $(g \circ f)(a)$ dulu

misal asumsikan $f(a) = b$, $a \in A$ dan $b \in B$

$$g(b) = H, b \in B \text{ dan } H \subseteq C$$

$$g(f(a)) = g(b) = H, \text{ maka}$$

$$(g \circ f)^{-1}H = a \dots \textcircled{1}$$

1. Buktikan $f^{-1}(g^{-1}(H))$

Asumsikan $f(a) = b$, $a \in A$ dan $b \in B$
 $g(b) = H$, $H \in C$ dan $b \in B$

$$g^{-1}(H) = b \quad \text{dan} \quad f^{-1}(b) = a \\ \rightarrow f^{-1}(g^{-1}(H)) = f^{-1}(b) \\ = a //$$

$\therefore$ Dapat disimpulkan bahwa

$$(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H)) //$$

2. Diberikan contoh dua fungsi $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

sedemikian hingga $f \neq g$ tetapi $f \circ g = g \circ f$

d. > Tunjukkan bahwa jika $f : A \rightarrow B$ injektif dan $E \subseteq A$, maka $f^{-1}(f(E)) = E$. > Berikan contoh untuk menunjukkan bahwa kesamaan tak terpenuhi jika f tak-injektif.

1. $f : A \rightarrow B$ injektif, maka :

ambil $a_1 \in A$ dan $a_2 \in A$; te

temukan b_1, b_2 di B sehingga

$$a_1 \neq a_2, \text{ akibatnya}$$

$$f(a_1) \neq f(a_2)$$

$$b_1 \neq b_2$$

Sebab $E \subseteq A$, maka memenuhi sifat injektif

juga. Asumsikan $f(E) = C$, maka

$$f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(C)$$

$$= E //$$

Contoh bukti ketika f tak injektif, maka kesamaan tak terpenuhi :

> Ambil sembarang $b_1, b_2 \in B$,

Asumsikan bahwa :

$$f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) = E$$

lalu, coba buktikan ke persamaan

$$f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(b_1)$$

terdapat dua kemungkinan, yakni :

$$f(E) = \begin{cases} b_1 \\ b_2 \end{cases}$$

Jadi, Karena terdapat dua kemungkinan, tak akan dapat ditentukan hasil dari fungsi tersebut.

b. Tunjukkan bahwa jika $f : A \rightarrow B$ surjektif dan $H \subseteq B$, maka $f(f^{-1}(H)) = H$.

Berikan contoh untuk menunjukkan bahwa kesamaan tak terpenuhi jika f tak surjektif

1. Karena $f : A \rightarrow B$ surjektif, maka :

$\forall b$ di B ; temukan a di A , sehingga :

$$f(a) = b,$$

Jadi, ketika diambil sembarang $b \in B$ akan memiliki pasangan di A .

misal asumsikan :

$$f(x) = H, \text{ maka : } f^{-1}(H) = x$$

Sehingga :

$$f(f^{-1}(H)) = f(x) \\ = H$$

Jadi, terbukti bahwa jika $f : A \rightarrow B$ surjektif dan $H \subseteq B$, maka $f(f^{-1}(H)) = H$

Contoh : Ambil $b \in B$, maka belum tentu b punya pasangan di A .

* Asumsikan b tidak punya pasangan di A , maka :

$$f(f^{-1}(b)) = f(\downarrow)$$

tidak punya pasangan di A , sehingga tidak dapat diselesaikan